

LÊ ANH VINH  
TRỊNH HOÀI DƯƠNG - LÊ THỊ THU HƯỜNG - PHẠM THỊ HƯƠNG  
(Sưu tầm và biên soạn)

**CÁC KÌ THI**  
**TOÁN**  
**QUỐC TẾ**  
**TẬP 3**

ONG NGỮ ANH - VIỆT

ành cho học sinh Trung học cơ sở  
à Trung học phổ thông

American Mathematics  
Competitions (AMC)

American Invitational Mathematics  
Examination (AIME)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

## Một số lưu ý khi sử dụng

- Đề tiếng Việt sử dụng chung hình với đề tiếng Anh.
- Lời giải tiếng Việt sử dụng chung hình với lời giải tiếng Anh nếu hình vẽ giống hệt nhau.
- Một số kí hiệu vẫn giữ nguyên bản trong tiếng Anh nhưng được thay đổi cho phù hợp theo tiếng Việt (ví dụ như  $\overline{AB}$  là đoạn thẳng trong tiếng Anh nhưng trong tiếng Việt là  $AB, \dots$ ).
- Đối với những bài toán trong AMC 12 nếu giống AMC 10 thì xem lời giải AMC 10 trong cùng năm học đó.

## Tài liệu tham khảo

Các đề thi được sưu tầm từ Ban tổ chức các kì thi AMC, AIME và website <http://www.artofproblemsolving.com>.

## MỤC LỤC

Lời giới thiệu .....	4
<b>PHẦN THỨ NHẤT. Kỳ thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ</b> <b>AMC (American Mathematics Competitions) .....</b>	<b>5</b>
<i>A. Năm học 2014-2015.....</i>	<i>6</i>
AMC 8 .....	6
AMC 10 - Test A .....	23
AMC 10 - Test B .....	45
AMC 12 - Test A .....	67
AMC 12 - Test B .....	85
<i>B. Năm học 2013-2014.....</i>	<i>104</i>
AMC 8 .....	104
AMC 10 - Test A .....	122
AMC 10 - Test B .....	145
AMC 12 - Test A .....	168
AMC 12 - Test B .....	184
<b>PHẦN THỨ HAI. Kỳ thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ</b> <b>AIME (American Invitational Mathematics Examination) .....</b>	<b>205</b>
<i>A. Năm học 2014-2015.....</i>	<i>206</i>
AIME - Test I .....	206
AIME - Test II .....	225
<i>B. Năm học 2013-2014.....</i>	<i>242</i>
AIME - Test I .....	242
AIME - Test II .....	263
ANSWER KEY - ĐÁP SỐ .....	281

## A. NĂM HỌC 2014 - 2015

## AMC 8

## PROBLEMS

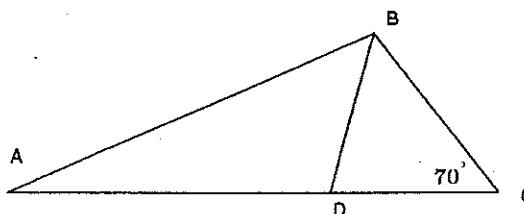
1. Harry and Terry are each told to calculate  $8 - (2 + 5)$ . Harry gets the correct answer. Terry ignores the parentheses and calculates  $8 - 2 + 5$ . If Harry's answer is  $H$  and Terry's answer is  $T$ , what is  $H - T$ ?  
(A)  $-10$     (B)  $-6$     (C)  $0$     (D)  $6$     (E)  $10$
2. Paul owes Paula 35 cents and has a pocket full of 5-cent coins, 10-cent coins, and 25-cent coins that he can use to pay her. What is the difference between the largest and the smallest number of coins he can use to pay her?  
(A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5
3. Isabella had a week to read a book for a school assignment. She read an average of 36 pages per day for the first three days and an average of 44 pages per day for the next three days. She then finished the book by reading 10 pages on the last day. How many pages were in the book?  
(A) 240    (B) 250    (C) 260    (D) 270    (E) 280
4. The sum of two prime numbers is 85. What is the product of these two prime numbers?  
(A) 85    (B) 91    (C) 115    (D) 133    (E) 166
5. Margie's car can go 32 miles on a gallon of gas, and gas currently costs \$4 per gallon. How many miles can Margie drive on \$20 worth of gas?  
(A) 64    (B) 128    (C) 160    (D) 320    (E) 640
6. Six rectangles each with a common base width of 2 have lengths of 1, 4, 9, 16, 25, and 36. What is the sum of the areas of the six rectangles?  
(A) 91    (B) 93    (C) 162    (D) 182    (E) 202
7. There are four more girls than boys in Ms. Raub's class of 28 students. What is the ratio of number of girls to the number of boys in her class?  
(A) 3 : 4    (B) 4 : 3    (C) 3 : 2    (D) 7 : 4    (E) 2 : 1
8. Eleven members of the Middle School Math Club each paid the same amount for a guest speaker to talk about problem solving at their math

club meeting. They paid their guest speaker  $\$1\overline{A}2$ . What is the missing digit  $A$  of this 3-digit number?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. In  $\triangle ABC$ ,  $D$  is a point on side  $AC$  such that  $BD = DC$  and  $\angle BCD$  measures  $70^\circ$ . What is the degree measure of  $\angle ADB$ ?

- (A) 100 (B) 120 (C) 135 (D) 140 (E) 150



10. The first AMC 8 was given in 1985 and it has been given annually since that time. Samantha turned 12 years old the year that she took the seventh AMC 8. In what year was Samantha born?

- (A) 1979 (B) 1980 (C) 1981 (D) 1982 (E) 1983

11. Jack wants to bike from his house to Jill's house, which is located three blocks east and two blocks north of Jack's house. After biking each block, Jack can continue either east or north, but he needs to avoid a dangerous intersection one block east and one block north of his house. In how many ways can he reach Jill's house by biking a total of five blocks?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

12. A magazine printed photos of three celebrities along with three photos of the celebrities as babies. The baby pictures did not identify the celebrities. Readers were asked to match each celebrity with the correct baby pictures. What is the probability that a reader guessing at random will match all three correctly?

- (A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{1}{6}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{1}{2}$

13. If  $n$  and  $m$  are integers and  $n^2 + m^2$  is even, which of the following is impossible?

- (A)  $n$  and  $m$  are even (B)  $n$  and  $m$  are odd (C)  $n + m$  is even  
(D)  $n + m$  is odd (E) none of these are impossible

- 5). Harry gets the  
calculates  $8 - 2 + 5$ . If  
s  $H - T$ ?  
) 10

-cent coins, 10-cent  
that is the difference  
s he can use to pay

nnment. She read an  
s and an average of  
inished the book by  
were in the book?  
(E) 280 .

roduct of these two

) 166

gas currently costs  
\$20 worth of gas?  
(E) 640

2 have lengths of  
s of the six rectan-

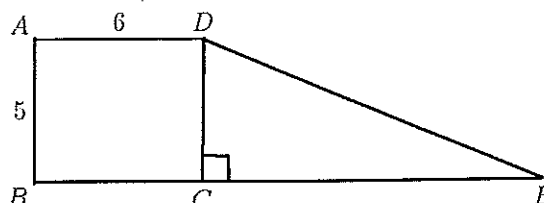
) 202

lass of 28 students.  
of boys in her class?

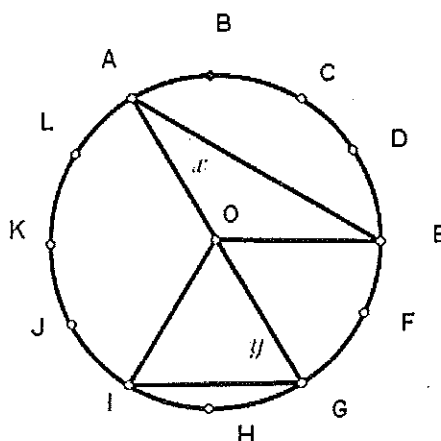
(E) 2 : 1

each paid the same  
lving at their math

14. Rectangle  $ABCD$  and right triangle  $DCE$  have the same area. They are joined to form a trapezoid, as shown. What is  $DE$ ?  
 (A) 12    (B) 13    (C) 14    (D) 15    (E) 16



15. The circumference of the circle with center  $O$  is divided into 12 equal arcs, marked the letters  $A$  through  $L$  as seen below. What is the number of degrees in the sum of the angles  $x$  and  $y$ ?  
 (A) 75    (B) 80    (C) 90    (D) 120    (E) 150



16. The "Middle School Eight" basketball conference has 8 teams. Every season, each team plays every other conference team twice (home and away), and each team also plays 4 games against non-conference opponents. What is the total number of games in a season involving the "Middle School Eight" teams?  
 (A) 60    (B) 88    (C) 96    (D) 144    (E) 160
17. George walks 1 mile to school. He leaves home at the same time each day, walks at a steady speed of 3 miles per hour, and arrives just as school begins. Today he was distracted by the pleasant weather and walked the

first  $\frac{1}{2}$  mile at a speed of only 2 miles per hour. At how many miles per hour must George run the last  $\frac{1}{2}$  mile in order to arrive just as school begins today?

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 10      (E) 12

18. Four children were born at City Hospital yesterday. Assume each child is equally likely to be a boy or a girl. Which of the following outcomes is most likely

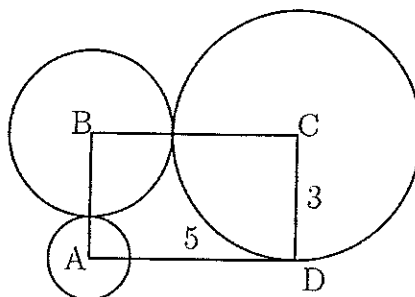
- (A) all 4 are boys  
(B) all 4 are girls  
(C) 2 are girls and 2 are boys  
(D) 3 are of one gender and 1 is of the other gender  
(E) all of these outcomes are equally likely

19. A cube with 3-inch edges is to be constructed from 27 smaller cubes with 1-inch edges. Twenty-one of the cubes are colored red and 6 are colored white. If the 3-inch cube is constructed to have the smallest possible white surface area showing, what fraction of the surface area is white?

- (A)  $\frac{5}{54}$       (B)  $\frac{1}{9}$       (C)  $\frac{5}{27}$       (D)  $\frac{2}{9}$       (E)  $\frac{1}{3}$

20. Rectangle  $ABCD$  has sides  $CD = 3$  and  $DA = 5$ . A circle of radius 1 is centered at  $A$ , a circle of radius 2 is centered at  $B$ , and a circle of radius 3 is centered at  $C$ . Which of the following is closest to the area of the region inside the rectangle but outside all three circles?

- (A) 3.5      (B) 4.0      (C) 4.5      (D) 5.0      (E) 5.5



21. The 7-digit numbers  $\overline{74A52B1}$  and  $\overline{326AB4C}$  are each multiples of 3. Which of the following could be the value of  $C$ ?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 5      (E) 8

22. A 2-digit number is such that the product of the digits plus the sum of the digits is equal to the number. What is the units digit of the number?  
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

23. Three members of the Euclid Middle School girls' softball team had the following conversation.

Ashley: I just realized that our uniform numbers are all 2-digit primes.

Bethany: And the sum of your two uniform numbers is the date of my birthday earlier this month.

Caitlin: That's funny. The sum of your two uniform numbers is the date of my birthday later this month.

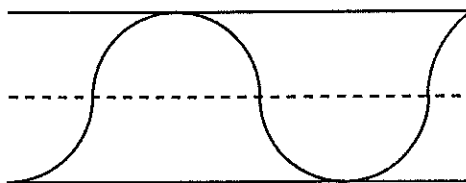
Ashley: And the sum of your two uniform numbers is today's date.

What number does Caitlin wear?

- (A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23
24. One day the Beverage Barn sold 252 cans of soda to 100 customers, and every customer bought at least one can of soda. What is the maximum possible median number of cans of soda bought per customer on that day?  
(A) 2.5 (B) 3.0 (C) 3.5 (D) 4.0 (E) 4.5
25. A straight one-mile stretch of highway, 40 feet wide, is closed. Robert rides his bike on a path composed of semicircles as shown. If he rides at 5 miles per hour, how many hours will it take to cover the one-mile stretch?

Note: 1 mile = 5280 feet

- (A)  $\frac{\pi}{11}$  (B)  $\frac{\pi}{10}$  (C)  $\frac{\pi}{5}$  (D)  $\frac{2\pi}{5}$  (E)  $\frac{2\pi}{3}$





ĐỀ BÀI

1. Harry đọc kết quả của phép tính  $8 - (2 + 5)$ . Còn Terry bỏ các ngoặc và đọc kết quả phép tính  $8 - 2 + 5$ . Nếu câu trả lời của Harry là  $H$  và câu trả lời của Terry là  $T$  thì kết quả của phép tính  $H - T$  là bao nhiêu?  
(A)  $-10$  (B)  $-6$  (C)  $0$  (D)  $6$  (E)  $10$
2. Paul nợ Paula 35 cent. Trong túi của Paul chỉ có các đồng xu 5 cent, 10 cent, 25 cent. Hỏi hiệu giữa số đồng xu nhiều nhất và số đồng xu ít nhất mà Paul có thể dùng để trả nợ là bao nhiêu?  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
3. Isabella có một tuần để đọc một cuốn sách do nhà trường giao cho. Cô ấy đọc trung bình 36 trang mỗi ngày trong ba ngày đầu tiên và trung bình 44 trang mỗi ngày trong ba ngày tiếp theo. Ngày cuối cùng cô ấy đọc 10 trang nữa thì đọc xong cuốn sách. Hỏi cuốn sách có bao nhiêu trang?  
(A) 240 (B) 250 (C) 260 (D) 270 (E) 280.
4. Tổng của hai số nguyên tố là 85. Tính tích của chúng.  
(A) 85 (B) 91 (C) 115 (D) 133 (E) 166.
5. Xe của Margie có thể đi được 32 dặm trên một galông xăng. Hiện nay giá xăng là 4 đô la trên một galông. Hỏi Margie có thể lái xe đi được bao nhiêu dặm nếu cô ấy chỉ có 20 đô la để đổ xăng?  
(A) 64 (B) 128 (C) 160 (D) 320 (E) 640
6. Cho 6 hình chữ nhật đều có độ dài một chiều là 2 và độ dài chiều còn lại là 1, 4, 9, 16, 25 và 36. Tính tổng diện tích 6 hình chữ nhật đó.  
(A) 91 (B) 93 (C) 162 (D) 182 (E) 202
7. Trong lớp của cô Raub có 28 học sinh, số học sinh nữ nhiều hơn số học sinh nam là 4 bạn. Tính tỉ lệ số học sinh nữ trên số học sinh nam.  
(A)  $3 : 4$  (B)  $4 : 3$  (C)  $3 : 2$  (D)  $7 : 4$  (E)  $2 : 1$
8. Mười một thành viên của câu lạc bộ Toán học dành cho Trung học, mỗi người phải trả cùng số tiền là  $\overline{1A2}$  đô la cho một diễn giả là khách mời để họ giảng về cách giải quyết một vấn đề toán học trong buổi giao lưu của câu lạc bộ. Hỏi chữ số  $A$  còn thiếu trong số có ba chữ số đó là số nào?  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

9. Trong tam giác  $ABC$  lấy điểm  $D$  nằm trên cạnh  $AC$  sao cho  $BD = DC$  và  $\angle BCD = 70^\circ$ . Tính  $\angle ADB$  theo độ.  
(A) 100 (B) 120 (C) 135 (D) 140 (E) 150
10. Cuộc thi AMC8 được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1985 và sau đó được tổ chức hàng năm. Samantha đã tham gia dự cuộc thi AMC8 lần thứ 7 khi cô 12 tuổi. Hỏi Samantha sinh năm bao nhiêu?  
(A) 1979 (B) 1980 (C) 1981 (D) 1982 (E) 1983
11. Jack muốn đạp xe từ nhà anh ấy đến nhà Jill, nhưng bị ngăn bởi ba tòa nhà phía đông và hai tòa nhà phía bắc so với nhà Jack. Sau khi đạp xe qua mỗi tòa nhà Jack có thể tiếp tục rẽ hướng đông hoặc hướng bắc, nhưng anh ấy phải tránh một ngã rẽ nguy hiểm là giao của một tòa nhà phía đông và một tòa nhà phía bắc. Hỏi có bao nhiêu cách mà Jack có thể đến được nhà Jill bằng xe đạp nếu tất cả có năm lần đi qua các tòa nhà.  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10
12. Một tạp chí đã đăng ba bức ảnh khi còn nhỏ của ba người nổi tiếng. Không thể nhận ra ba người nổi tiếng trong ba bức ảnh đó, độc giả được yêu cầu ghép ba bức ảnh đó đúng với ba người nổi tiếng. Hỏi xác suất để một độc giả ghép ngẫu nhiên đúng cả ba bức hình đó là bao nhiêu?  
(A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{1}{6}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{1}{2}$
13. Nếu  $m$  và  $n$  là hai số nguyên và  $n^2 + m^2$  là số chẵn thì điều khẳng định nào sau đây là không thể xảy ra.  
(A)  $n$  và  $m$  là chẵn (B)  $n$  và  $m$  là lẻ (C)  $n + m$  là chẵn  
(D)  $n + m$  là lẻ (E) tất cả các câu trên đều là không thể.
14. Hình chữ nhật  $ABCD$  và tam giác vuông  $DCE$  có cùng diện tích. Chúng được ghép với nhau thành hình thang như hình vẽ. Tính độ dài cạnh  $DE$ .  
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16
15. Chia một đường tròn tâm  $O$  thành 12 cung bằng nhau với các điểm chia được kí hiệu từ  $A$  đến  $L$  như hình vẽ dưới. Hỏi tổng số đo của hai góc  $x$  và  $y$  lớn nhất bằng bao nhiêu?  
(A) 75 (B) 80 (C) 90 (D) 120 (E) 150
16. Hội bóng rổ của "Trường Trung học Eight" có 8 đội. Mỗi mùa, mỗi đội phải đấu hai trận với mỗi đội khác trong hội (tại sân nhà và sân khách) và mỗi đội cũng phải đấu 4 trận với các đối thủ ngoài hội. Tính tổng số

- trận mà các đội "Trường Trung học Eight" phải thi đấu trong mỗi mùa.  
(A) 60 (B) 88 (C) 96 (D) 144 (E) 160
17. George phải đi 1 dặm để đến trường. Mỗi ngày anh ấy đều rời khỏi nhà cùng một lúc, đi với vận tốc không đổi 3 dặm trên một giờ, và đến đúng lúc trường bắt đầu học. Hôm nay do ảnh hưởng của thời tiết nên anh ấy chỉ đi được 2 dặm trên một giờ với một nửa quãng đường đầu. Hỏi anh ấy phải đi với vận tốc bao nhiêu ở nửa quãng đường tiếp theo để có thể đến trường kịp giờ?  
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12
18. Ngày hôm qua có bốn em bé được sinh ra tại Bệnh Viện Thành Phố. Biết rằng xác suất mỗi em bé là trai hoặc gái là như nhau. Kết quả nào trong số các kết quả dưới đây có thể xảy ra nhất?  
(A) tất cả 4 em bé đều là trai.  
(B) tất cả 4 em bé đều là gái.  
(C) 2 bé là trai và 2 bé là gái.  
(D) 3 bé có cùng giới tính và 1 bé là giới tính khác  
(E) tất cả các kết quả trên giống nhau.
19. Một khối lập phương lớn có độ dài cạnh là 3 inch được tạo từ 27 khối lập phương nhỏ với độ dài cạnh bằng 1 inch. Trong đó có 21 khối nhỏ được tô màu đỏ và 6 khối còn lại tô màu trắng. Nếu khối lập phương lớn có diện tích bề mặt được tô màu trắng là nhỏ nhất thì tỉ lệ diện tích bề mặt được tô trắng là bao nhiêu?  
(A)  $\frac{5}{54}$  (B)  $\frac{1}{9}$  (C)  $\frac{5}{27}$  (D)  $\frac{2}{9}$  (E)  $\frac{1}{3}$
20. Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $CD = 3$ ,  $DA = 5$ . Vẽ một đường tròn tâm tại  $A$  bán kính là 1, một đường tròn tâm tại  $B$  bán kính là 2, một đường tròn tâm tại  $C$  bán kính là 3. Diện tích phần nằm bên trong hình chữ nhật nhưng nằm bên ngoài cả ba đường tròn gần số nào nhất trong các số sau?  
(A) 3,5 (B) 4,0 (C) 4,5 (D) 5,0 (E) 5,5
21. Cho hai số có 7 chữ số  $\overline{74A52B1}$  và  $\overline{326AB4C}$  đều là bội của 3. Hỏi  $C$  có thể là chữ số nào?  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8.
22. Một số có hai chữ số mà tích của các chữ số cộng với tổng của các chữ số bằng chính số đó. Hỏi chữ số hàng đơn vị bằng bao nhiêu?  
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9.

23. Ba thành viên trong đội bóng chày của " Trường trung học nữ Euclid " trò chuyện với nhau như sau  
 Ashley: Tôi nhận ra rằng các số trên đồng phục của chúng ta là số nguyên tố có hai chữ số.  
 Bethany: Và tổng hai số trên đồng phục hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này.  
 Caitlin: Thật thú vị, tổng hai số trên đồng phục hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.  
 Ashley: Và tổng hai số trên đồng phục hai bạn là ngày hôm nay.  
 Hỏi số trên áo đồng phục của Caitlin là bao nhiêu?  
 (A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23
24. Một ngày, quầy Beverage Barn bán 252 lon sô đa cho 100 khách hàng, và mỗi khách hàng mua ít nhất một lon sô đa. Hỏi số trung vị số lon sô đa mua bởi mỗi khách hàng vào ngày hôm đó có thể lớn nhất bằng bao nhiêu?  
 (A) 2,5 (B) 3,0 (C) 3,5 (D) 4,0 (E) 4,5
25. Một đoạn đường quốc lộ, rộng 40 feet. Robert đạp xe theo đường đi là các nửa đường tròn như hình vẽ dưới. Nếu anh ấy đi 5 dặm một giờ thì anh ấy sẽ phải mất bao nhiêu lâu để có thể đi đoạn đường đó? Biết rằng 1 dặm = 5280 feet.  
 (A)  $\frac{\pi}{11}$  (B)  $\frac{\pi}{10}$  (C)  $\frac{\pi}{5}$  (D)  $\frac{2\pi}{5}$  (E)  $\frac{2\pi}{3}$

### SOLUTIONS - LỜI GIẢI

1. We have  $H = 8 - 7 = 1$  and  $T = 8 - 2 + 5 = 11$ . Clearly  $1 - 11 = \boxed{-10}$ , so our answer is  $\boxed{(A)}$ .  
 • Ta có  $H = 8 - 7 = 1$  và  $T = 8 - 2 + 5 = 11$ . Vậy câu trả lời là  $1 - 11 = \boxed{-10}$ .
2. The fewest amount of coins that can be used is 2 (a quarter and a dime). The greatest amount is 7, if he uses all nickels. Therefore we have  $7 - 2 = 5$ , or  $\boxed{(E)}$ .  
 • Số đồng xu ít nhất có thể sử dụng là 2 (đồng xu 10 cent và đồng xu 25), số đồng xu nhiều nhất là 7 (7 đồng xu 5 cent). Khi đó ta có  $7 - 2 = 5$ .

3. Isabella read  $3 \cdot 36 + 3 \cdot 44$  pages in the first 6 days. Although this can be calculated directly, it is simpler to calculate it as  $3 \cdot (36 + 44) = 3 \cdot 80$ , which gives that she read 240 pages. However, she read 10 more pages on the last day, for a total of  $240 + 10 = (B) 250$  pages.
  - Isabella đọc được  $3 \cdot 36 + 3 \cdot 44 = 3 \cdot (36 + 44) = 3 \cdot 80 = 240$  trang trong 6 ngày đầu tiên. Cô ấy đã đọc 10 trang vào ngày cuối cùng nên tổng số trang cô ấy đọc là  $240 + 10 = 250$  trang.
4. Since the two prime numbers sum to an odd number, one of them must be even. The only even prime number is 2. The other prime number is  $85 - 2 = 83$ , and the product of these two numbers is  $83 \cdot 2 = (E) 166$ , or  $(E)$ .
  - Do tổng của hai số nguyên tố là số lẻ nên một trong chúng phải là số chẵn. Số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Vậy số nguyên tố còn lại là  $85 - 2 = 83$ , suy ra tích của chúng là  $83 \cdot 2 = (E) 166$ .
5. Margie can afford  $20/4 = 5$  gallons of gas. She can go  $32 \cdot 5 = (D) 160$  miles on this amount of gas.
  - Margie có thể mua được  $20/4 = 5$  galông xăng. Do đó cô ấy có thể đi được  $32 \cdot 5 = (D) 160$  dặm với lượng xăng đó.
6. The sum of the areas is equal to  $2 \times 1 + 2 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 16 + 2 \times 25 + 2 \times 36$ . This is simply equal to  $2 \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$ , which is equal to  $2 \times 91$ , which is equal to our final answer of  $(D) 182$ .
  - Tổng diện tích sáu hình chữ nhật đó là  $2 \times 1 + 2 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 16 + 2 \times 25 + 2 \times 36 = 2 \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = 2 \times 91 = 182$
7. We can set up an equation with  $x$  being the number of girls in the class. The number of boys in the class is equal to  $x - 4$ . Since the total number of students is equal to 28, we get  $x + x - 4 = 28$ . Solving this equation, we get  $x = 16$ . There are  $16 - 4 = 12$  boys in our class, and our answer is  $16 : 12 = (B) 4 : 3$ , or  $(B)$ .
  - Gọi  $x$  là số học sinh nữ trong lớp. Suy ra số học sinh nam trong lớp là  $x - 4$ . Do tổng số các học sinh là 28 nên  $x + x - 4 = 28$ . Giải phương trình đó ta được  $x = 16$ . Vậy có  $16 - 4 = 12$  học sinh nam trong lớp nên tỉ lệ đó là  $16 : 12 = (B) 4 : 3$ , or  $(B)$
8. A number is divisible by 11 if the difference between the sum of the digits in the odd-numbered slots (e.g. the ones slot, the hundreds slot, etc.) and

the sum in the even-numbered slots (e.g. the tens slot, the thousands slot) is a multiple of 11. So  $1 + 2 - A$  is equivalent to 0 (mod 11). Clearly 3,  $A$  cannot be equal to 11 or any multiple of 11 greater than that. So  $3 - A = 0 \rightarrow A = 3$ , and our answer is  $\boxed{(D)3}$ .

• Ta biết rằng một số chia hết cho 11 nếu hiệu của tổng của các chữ số ở vị trí lẻ (như chữ số hàng đơn vị hoặc chữ số hàng trăm) và tổng của các chữ số ở vị trí chẵn (như chữ số hàng chục hoặc chữ số hàng nghìn) là bội của 11. Do đó,  $1 + 2 - A$  đồng dư với 0 (mod 11). Rõ ràng  $A$  chính là số 3 vì hiệu đó không thể bằng 11 hoặc bằng bội khác 0 của 11.

9.  $BD = DC$ , so  $\angle DBC = \angle DCB = 70^\circ$ . Then  $\angle CDB = 40^\circ$ . Since angle  $ADB$  and  $BDC$  are supplementary,  $\angle ADB = 180^\circ - 40^\circ = \boxed{(D)140^\circ}$ .

• Do  $BD = DC$  nên  $\angle DBC = \angle DCB = 70^\circ$ . Suy ra  $\angle CDB = 40^\circ$ . Do  $\angle ADB$  và  $\angle BDC$  phụ nhau nên  $\angle ADB = 180^\circ - 40^\circ = \boxed{(D)140^\circ}$ .

10. The seventh AMC8 would have been given in 1991, when Samantha was 12. Therefore, she was born in  $1991 - 12 = 1979$ , or  $\boxed{(A)}$ .

• Cuộc thi AMC8 lần thứ 7 được tổ chức vào năm 1991, khi đó Samantha 12 tuổi. Do đó, cô ấy sinh năm  $1991 - 12 = 1979$  hay đáp án là  $\boxed{(A)}$ .

11. We can apply complementary counting and count the paths that DO go through the blocked intersection, which is  $\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$ . There are a total of  $\binom{5}{2} = 10$  paths, so there are  $10 - 6 = 4$  paths possible.  $\boxed{(A)}$  is the correct answer.

• Tổng số đường đi là  $\binom{5}{2} = 10$ . Số đường đi bị chặn là  $\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$ . Vậy số đường có thể đi là  $10 - 6 = 4$  hay đáp án là  $\boxed{(A)}$ .

12. There is a  $\frac{1}{3}$  chance that the reader will choose the correct baby picture for the first person. Next, the second person gives a  $\frac{1}{2}$  chance, and the last person leaves only 1 choice. Thus, the probability is  $\frac{1}{3 \cdot 2} = \boxed{(B) \frac{1}{6}}$ .

• Có  $\frac{1}{3}$  cơ hội để độc giả chọn đúng bức ảnh khi còn nhỏ cho người thứ nhất. Tiếp theo, người thứ hai có  $\frac{1}{2}$  cơ hội và người cuối cùng chỉ có duy

nhất một cách chọn. Do vậy xác suất đó là  $\frac{1}{3 \cdot 2} = \boxed{(B) \frac{1}{6}}$ .

13. Since  $n^2 + m^2$  is even, either both  $n^2$  and  $m^2$  are even, or they are both odd. Therefore,  $n$  and  $m$  are either both even or both odd, since the square of an even number is even and the square of an odd number is odd. As a result,  $n + m$  must be even. The answer, then, is  $\boxed{(D)}$ .

• Do  $n^2 + m^2$  là số chẵn nên cả hai  $n^2$  và  $m^2$  hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do bình phương của một số chẵn là số chẵn và bình phương của một số lẻ là số lẻ nên cả hai  $n$  và  $m$  hoặc cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Suy ra  $n + m$  là số chẵn. Do đó câu trả lời là  $\boxed{(D)}$ .

14. The area of  $\triangle CDE$  is  $\frac{DC \cdot CE}{2}$ . The area of  $ABCD$  is  $AB \cdot AD = 5 \cdot 6 = 30$ , which also must be equal to the area of  $\triangle CDE$ , which, since  $DC = 5$ , must in turn equal  $\frac{5 \cdot CE}{2}$ . Through transitivity, then,  $\frac{5 \cdot CE}{2} = 30$ , and  $CE = 12$ . It should be apparent that  $\triangle CDE$  is a 5-12-13 triangle, so  $DE = \boxed{13}$ , or  $\boxed{(B)}$ .

• Diện tích của  $\triangle CDE$  là  $\frac{DC \cdot CE}{2}$ . Diện tích của  $ABCD$  là  $AB \cdot AD = 5 \cdot 6 = 30$ , nó cũng phải bằng diện tích của  $\triangle CDE$  và bằng  $\frac{DC \cdot CE}{2} = \frac{5 \cdot CE}{2}$ , suy ra  $CE = 12$ . Sử dụng Định lí Pytago cho  $\triangle CDE$  nên  $DE = \boxed{13(B)}$ .

15. For this problem, it is useful to know that the measure of an inscribed angle is half the measure of its corresponding central angle. Since each unit arc is  $\frac{1}{12}$  of the circle's circumference, each unit central angle measures  $\left(\frac{360}{12}\right)^\circ = 30^\circ$ . Then, we know that the inscribed arc of  $\angle x = 60^\circ$  so  $m\angle x = 30^\circ$ ; and the inscribed arc of  $\angle y = 120^\circ$  so  $m\angle y = 60^\circ$ .  $m\angle x + m\angle y = 30^\circ + 60^\circ = \boxed{(C) 90^\circ}$ .

• Đối với bài toán này, ta sử dụng kết quả đã biết là góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm chắn cùng một cung. Do mỗi cung nhỏ có độ dài bằng  $\frac{1}{12}$  chu vi đường tròn nên số đo mỗi cung là  $\left(\frac{360}{12}\right)^\circ = 30^\circ$ . Do đó số đo góc nội tiếp  $\angle x = 30^\circ$  và góc nội tiếp  $\angle y = 60^\circ$ . Vậy  $\angle x + \angle y = 30^\circ + 60^\circ = \boxed{(C) 90^\circ}$ .

16. Within the conference, there are 8 teams, so there are  $\binom{8}{2} = 28$  pairings of teams, and each pair must play two games, for a total of  $28 \cdot 2 = 56$  games within the conference.

Each team also plays 4 games outside the conference, and there are 8 teams, so there are a total of  $4 \cdot 8 = 32$  games outside the conference.

Therefore, the total number of games is  $56 + 32 = \boxed{88}$ , so  $\boxed{(B)}$  is our answer.

- Xét trong phạm vi hội nghị thì có 8 đội nên có  $\binom{8}{2} = 28$  cặp, và mỗi cặp phải đấu hai trận, do đó tổng số trận trong phạm vi hội nghị là  $28 \cdot 2 = 56$ .

Mỗi đội cũng đấu 4 trận với các đội ngoài hội nghị, và có 8 đội nên có tổng số trận với các đội ngoài hội nghị là  $4 \cdot 8 = 32$ .

Vậy tổng số tất cả các trận là  $56 + 32 = \boxed{(B)88}$ .

17. Note that on a normal day, it takes him  $1/3$  hour to get to school. However, today it took  $\frac{1/2 \text{ mile}}{2 \text{ mph}} = 1/4$  hour to walk the first  $1/2$  mile. That means that he has  $1/3 - 1/4 = 1/12$  hours left to get to school, and  $1/2$  mile left to go. Therefore, his speed must be  $\frac{1/2 \text{ mile}}{1/12 \text{ hour}} = \boxed{6 \text{ mph}}$ , so  $\boxed{(B)}$  is the answer.

- Chú ý rằng vào mỗi ngày thường thì anh ấy đi  $\frac{1}{3}$  h thì đến trường. Tuy nhiên, hôm nay phải mất  $\frac{1/2 \text{ dặm}}{2 \text{ dặm/h}} = 1/4$  h đi được  $\frac{1}{2}$  dặm đầu. Điều này có nghĩa là anh ấy còn  $1/3 - 1/4 = 1/12$  h để đến trường, và  $\frac{1}{2}$  dặm để đi. Do đó vận tốc của anh ấy sẽ phải đi trong nửa quãng đường sau là  $\frac{1/2 \text{ dặm}}{1/12 \text{ h}} = \boxed{(B)6 \text{ dặm/h}}$ .

18. We'll just start by breaking cases down. The probability of (A) occurring is  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ . The probability of (B) occurring is  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ . The probability of (C) occurring is  $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ , because we need to choose 2 of the 4 children to be girls.



For (D), there are two possible cases, 3 girls and 1 boy or 3 boys and 1 girl. The probability of the first case is  $\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$  because we need to choose 1 of the 4 children to be a boy. However, the second case has the same probability because we are choosing 1 of the 4 children to be a girl, so the total probability is  $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ .

So out of the four fractions, (D) is the largest. So our answer is

(D) 3 of one gender and 1 of the other.

• Xác suất để trường hợp (A) xảy ra là  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ . Xác suất để trường hợp (B) xảy ra là  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ . Xác suất để trường hợp (C) xảy ra là  $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ , vì chúng ta phải chọn 2 trong 4 em bé là bé gái. Với trường hợp (D) có hai trường hợp nhỏ, trường hợp 3 gái và 1 trai xác suất là  $\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ , và bằng xác suất trường hợp 3 trai 1 gái, nên tổng xác suất trường hợp (D) là  $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ . So sánh các kết quả ta thấy (D) là trường hợp có xác suất lớn nhất.

19. For the least possible surface area, we should have 1 cube in the center, and the other 5 with only 1 face exposed. This gives 5 square inches of white surface area. Since the cube has a surface area of 54 square inches, our answer is (A)  $\frac{5}{54}$ .

• Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì chúng ta phải đặt một khối màu trắng làm trung tâm và năm khối còn lại chỉ có một mặt bị lộ ra ngoài. Khi đó thì diện tích bề mặt màu trắng là 5 inch<sup>2</sup>. Trong khi đó khối lập phương lớn có tổng diện tích bề mặt là 54 inch<sup>2</sup>. Do đó câu trả lời là (A)  $\frac{5}{54}$ .

20. The area in the rectangle but outside the circles is the area of the rectangle minus the area of all three of the quarter circles in the rectangle.

The area of the rectangle is  $3 \cdot 5 = 15$ . The area of all 3 quarter circles is  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2)^2}{4} + \frac{\pi(3)^2}{4} = \frac{14\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}$ . Therefore the area in the rectangle but

outside the circles is  $15 - \frac{7\pi}{2}$ .  $\pi$  is approximately  $22/7$ , and substituting that in will give  $15 - 11 = \boxed{(B) 4,0}$

• Diện tích miền nằm trong hình chữ nhật mà nằm ngoài ba hình tròn bằng diện tích hình chữ nhật trừ đi diện tích của một phần tư của cả ba hình tròn đó. Diện tích hình chữ nhật là  $3 \cdot 5 = 15$ . Diện tích của một phần tư cả ba đường tròn là  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2)^2}{4} + \frac{\pi(3)^2}{4} = \frac{14\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}$ . Do đó diện tích phần nằm trong hình chữ nhật và nằm ngoài đường tròn là  $15 - \frac{7\pi}{2}$ . Lấy  $\pi$  xấp xỉ bằng  $22/7$  và thay vào chúng ta được  $15 - 11 = \boxed{(B) 4,0}$ .

21. The sum of a number's digits mod 3 is congruent to the number (mod 3).  $\overline{74A52B1} \pmod 3$  must be congruent to 0, since it is divisible by 3. Therefore,  $7 + 4 + A + 5 + 2 + B + 1 \pmod 3$  is also congruent to 0.  $7 + 4 + 5 + 2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ , so  $A + B \equiv 2 \pmod 3$ . As we know,  $\overline{326AB4C} \equiv 0 \pmod 3$ , so  $3 + 2 + 6 + A + B + 4 + C = 15 + A + B + C \equiv 0 \pmod 3$ , and therefore  $A + B + C \equiv 0 \pmod 3$ . We can substitute 2 for  $A + B$ , so  $2 + C \equiv 0 \pmod 3$ , and therefore  $C \equiv 1 \pmod 3$ . This means that C can be 1, 4, or 7, but the only one of those that is an answer choice is  $\boxed{(A) 1}$ .

• Ta có tổng các chữ số của một số đồng dư với chính nó (mod 3). Do đó  $\overline{74A52B1} \equiv 0 \pmod 3$  do nó chia hết cho 3. Suy ra  $7 + 4 + A + 5 + 2 + B + 1 \equiv 0 \pmod 3$ , mà  $7 + 4 + 5 + 2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ , nên  $A + B \equiv 2 \pmod 3$ . Tương tự,  $\overline{326AB4C} \equiv 0 \pmod 3$ , nên  $3 + 2 + 6 + A + B + 4 + C = 15 + A + B + C \equiv 0 \pmod 3$ , do đó  $A + B + C \equiv 0 \pmod 3$ . Chúng ta thay  $A + B$  bằng 2 ta có  $2 + C \equiv 0 \pmod 3$ , nên  $C \equiv 1 \pmod 3$ . Vậy C có thể là 1, 4 hoặc 7 nên đáp án là  $\boxed{(A)}$ .

22. We can think of the number as  $10a + b$ , where a and b are digits. Since the number is equal to the product of the digits ( $a \cdot b$ ) plus the sum of the digits ( $a + b$ ), we can say that  $10a + b = a \cdot b + a + b$ . We can simplify this to  $10a = a \cdot b + a$ , and factor to  $(10)a = (b + 1)a$ . Dividing by a, we have that  $b + 1 = 10$ . Therefore, the units digit, b, is  $\boxed{(E) 9}$ .

• Gọi số cần tìm là  $10a + b$  với a và b là các chữ số. Do số đó bằng tích của các chữ số ( $a \cdot b$ ) cộng với tổng của các chữ số ( $a + b$ ), nên  $10a + b = a \cdot b + a + b$ , tương đương với  $10a = a \cdot b + a$ , lấy nhân tử chung được  $(10)a = (b + 1)a$ , chia hai vế cho a ta có  $b + 1 = 10$ . Vậy chữ số đơn vị b là  $\boxed{(E) 9}$ .

23. The maximum amount of days any given month can have is 31, and the smallest two digit primes are 11, 13, and 17. There are a few different sums that can be deduced from the following numbers, which are 24, 30, and 28, all of which represent the three days. Therefore, since Bethany says that the other two people's uniform numbers is earlier, so that means Caitlin and Ashley's numbers must add up to 24. Similarly, Caitlin says that the other two people's uniform numbers is later, so the sum must add up to 30. This leaves 28 as today's date. From this, Caitlin was referring to the uniform wearers 13 and 17, telling us that her number is 11, giving our solution as (A) 11.

• Số ngày lớn nhất của một tháng là 31 và những số nguyên tố nhỏ nhất có hai chữ số là 11, 13, và 17. Các tổng khác nhau có thể của ba số đó là 24, 30, và 28, đó là ba ngày khác nhau. Do Bethany nói rằng tổng hai số trên đồng phục hai bạn còn lại là ngày sinh nhật cô ấy đã trôi qua vào tháng này, nên tổng số trên đồng phục của Caitlin và Ashley phải là 24. Tương tự, Caitlin nói rằng tổng hai số trên đồng phục hai bạn còn lại là ngày sinh nhật của cô ấy sắp tới vào tháng này, nên tổng đó phải bằng 30. Do đó 28 sẽ là ngày hôm nay, mà  $28 = 11 + 17$ , nên số trên đồng phục của Caitlin là 11.

24. In order to maximize the median, we need to make the first half of the numbers as small as possible. Since there are 100 people, the median will be the average of the 50th and 51st largest amount of cans per person. To minimize the first 49, they would each have one can. Subtracting these 49 cans from the 252 cans gives us 203 cans left to divide among 51 people. Taking  $\frac{203}{51}$  gives us 3 and a remainder of 50. Seeing this, the largest number of cans the 50th person could have is 3, which leaves 4 to the rest of the people. The average of 3 and 4 is 3.5. Thus our answer is (C) 3.5.

• Để số trung vị lớn nhất thì chúng ta phải cho một nửa số đầu nhỏ nhất có thể. Do có 100 người nên số trung vị sẽ là trung bình cộng của giá trị thứ 50 và 51. Để cho 49 giá trị đầu tiên là nhỏ nhất thì chúng ta sẽ cho mỗi giá trị là 1 lon. Khi đó chúng ta còn  $252 - 49 = 203$  lon chia cho 51 người còn lại. Ta có  $\frac{203}{51}$  được 3 dư 50. Do đó số lon lớn nhất của người thứ 50 là 3, còn những người còn lại là 4. Số trung bình của 3 và 4 là 3.5. Do đó câu trả lời là (C) 3,5.

25. There are two possible interpretations of the problem: that the road as

a whole is 40 feet wide, or that each lane is 40 feet wide. Both interpretations will arrive at the same result. However, let us stick with the first interpretation for simplicity. Each lane must then be 20 feet wide, so Robert must be riding his bike in semicircles with radius 20 feet and diameter 40 feet. Since the road is 5280 feet long, over the whole mile,

Robert rides  $\frac{5280}{40} = 132$  semicircles in total. Were the semicircles full circles, their circumference would be  $2\pi \cdot 20 = 40\pi$  feet; as it is, the circumference of each is half that, or  $20\pi$  feet. Therefore, over the stretch of highway, Robert rides a total of  $132 \cdot 20\pi = 2640\pi$  feet, equivalent to  $\frac{\pi}{2}$  miles. Robert rides at 5 miles per hour, so divide the  $\frac{\pi}{2}$  miles by 5

mph to arrive at  $\boxed{(B) \frac{\pi}{10}}$  hours.

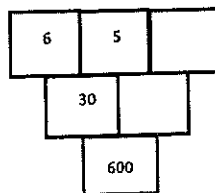
• Bài toán này có thể hiểu theo hai cách như sau: toàn bộ chiều rộng của quốc lộ là 40 feet, hay mỗi làn đường rộng 40 feet. Cả hai cách hiểu đó đều cho cùng kết quả, vì vậy để đơn giản chúng ta sẽ chỉ giải thích cho cách hiểu đầu tiên. Do đó mỗi làn đường sẽ có độ rộng là 20 feet, nên Robert phải đạp xe trên nửa đường tròn có bán kính là 20 feet và đường kính 40 feet. Do vạch dài 5280 feet nên Robert phải đạp xe đi hết  $\frac{5280}{40} = 132$  nửa đường tròn, mà chu vi mỗi đường tròn là  $2\pi \cdot 20 = 40\pi$  feet, suy ra chu vi mỗi nửa đường tròn là  $20\pi$  feet. Do đó để anh ấy có thể đi phủ được hết vạch kẻ thì phải đạp xe tổng số quãng đường là  $132 \cdot 20\pi = 2640\pi$  feet hay bằng  $\frac{\pi}{2}$  miles. Mà anh ấy đi với vận tốc 5 dặm một giờ nên số thời gian anh ấy phải đi là  $(\frac{\pi}{2})/5 = \boxed{(B) \frac{\pi}{10}}$  h

## B. NĂM HỌC 2013 - 2014

## AMC 8

## PROBLEMS

- Amma wants to arrange her model cars in rows with exactly 6 cars in each row. She now has 23 model cars. What is the smallest number of additional cars she must buy in order to be able to arrange all her cars this way?  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- A sign at the fish market says, "50% off, today only: half-pound packages for just 3 per package." What is the regular price for a full pound of fish, in dollars?  
(A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15
- What is the value of  $4 \cdot (-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots + 1000)$ ?  
(A) -10 (B) 0 (C) 1 (D) 500 (E) 2000
- Eight friends ate at a restaurant and agreed to share the bill equally. Because Judi forgot her money, each of her seven friends paid an extra 2.50 to cover her portion of the total bill. What was the total bill?  
(A) \$120 (B) \$128 (C) \$140 (D) \$144 (E) \$160
- Hammie is in the 6<sup>th</sup> grade and weighs 106 pounds. His quadruplet sisters are tiny babies and weigh 5, 5, 6, and 8 pounds. Which is greater, the average (mean) weight of these five children or the median weight, and by how many pounds?  
(A) median, by 60 (B) median, by 20 (C) average, by 5  
(D) average, by 15 (E) average, by 20
- The number in each box below is the product of the numbers in the two boxes that touch it in the row above. For example,  $30 = 6 \times 5$ . What is the missing number in the top row?



- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Trey and his mom stopped at a railroad crossing to let a train pass. As the train began to pass, Trey counted 6 cars in the first 10 seconds. It took the train 2 minutes and 45 seconds to clear the crossing at a constant speed. Which of the following was the most likely number of cars in the train?  
(A) 60      (B) 80      (C) 100      (D) 120      (E) 140
8. A fair coin is tossed 3 times. What is the probability of at least two consecutive heads?  
(A)  $\frac{1}{8}$       (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{3}{8}$       (D)  $\frac{1}{2}$       (E)  $\frac{3}{4}$
9. The Incredible Hulk can double the distance he jumps with each succeeding jump. If his first jump is 1 meter, the second jump is 2 meters, the third jump is 4 meters, and so on, then on which jump will he first be able to jump more than 1 kilometer?  
(A) 9<sup>th</sup>      (B) 10<sup>th</sup>      (C) 11<sup>th</sup>      (D) 12<sup>th</sup>      (E) 13<sup>th</sup>
10. What is the ratio of the least common multiple of 180 and 594 to the greatest common factor of 180 and 594?  
(A) 110      (B) 165      (C) 330      (D) 625      (E) 660
11. Ted's grandfather used his treadmill on 3 days this week. He went 2 miles each day. On Monday he jogged at a speed of 5 miles per hour. He walked at the rate of 3 miles per hour on Wednesday and at 4 miles per hour on Friday. If Grandfather had always walked at 4 miles per hour, he would have spent less time on the treadmill. How many minutes less?  
(A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5
12. At the 2013 Winnebago County Fair a vendor is offering a "fair special" on sandals. If you buy one pair of sandals at the regular price of \$50, you get a second pair at a 40% discount, and a third pair at half the regular price. Javier took advantage of the "fair special" to buy three pairs of sandals. What percentage of the \$150 regular price did he save?  
(A) 25%      (B) 30%      (C) 33%      (D) 40%      (E) 45%
13. When Clara totaled her scores, she inadvertently reversed the units digit and the tens digit of one score. By which of the following might her incorrect sum have differed from the correct one?  
(A) 45      (B) 46      (C) 47      (D) 48      (E) 49
14. Abe holds 1 green and 1 red jelly bean in his hand. Bea holds 1 green, 1 yellow, and 2 red jelly beans in her hand. Each randomly picks a jelly

bean to show the other. What is the probability that the colors match?  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (E)  $\frac{2}{3}$

15. If  $3^p + 3^4 = 90$ ,  $2^r + 44 = 76$ , and  $5^3 + 6^s = 1421$ , what is the product of  $p$ ,  $r$ , and  $s$ ?

(A) 27 (B) 40 (C) 50 (D) 70 (E) 90

16. A number of students from Fibonacci Middle School are taking part in a community service project. The ratio of 8<sup>th</sup>-graders to 6<sup>th</sup>-graders is 5 : 3, and the ratio of 8<sup>th</sup>-graders to 7<sup>th</sup>-graders is 8 : 5. What is the smallest number of students that could be participating in the project?

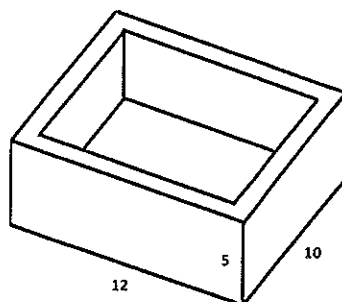
(A) 16 (B) 40 (C) 55 (D) 79 (E) 89

17. The sum of six consecutive positive integers is 2013. What is the largest of these six integers?

(A) 335 (B) 338 (C) 340 (D) 345 (E) 350

18. Isabella uses one-foot cubical blocks to build a rectangular fort that is 12 feet long, 10 feet wide, and 5 feet high. The floor and the four walls are all one foot thick. How many blocks does the fort contain?

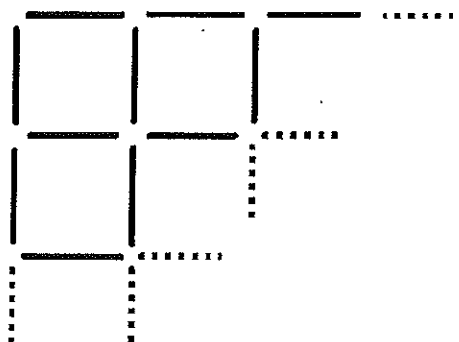
(A) 204 (B) 280 (C) 320 (D) 340 (E) 600



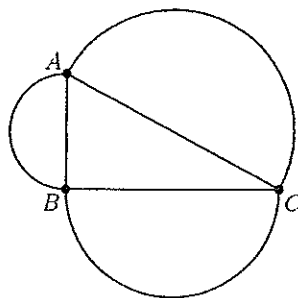
19. Bridget, Cassie, and Hannah are discussing the results of their last math test. Hannah shows Bridget and Cassie her test, but Bridget and Cassie don't show theirs to anyone. Cassie says, 'I didn't get the lowest score in our class,' and Bridget adds, 'I didn't get the highest score.' What is the ranking of the three girls from highest to lowest?

(A) Hannah, Cassie, Bridget (B) Hannah, Bridget, Cassie  
(C) Cassie, Bridget, Hannah (D) Cassie, Hannah, Bridget  
(E) Bridget, Cassie, Hannah

20. A  $1 \times 2$  rectangle is inscribed in a semicircle with longer side on the diameter. What is the area of the semicircle?  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{2\pi}{3}$  (C)  $\pi$  (D)  $\frac{4\pi}{3}$  (E)  $\frac{5\pi}{3}$
21. Samantha lives 2 blocks west and 1 block south of the southwest corner of City Park. Her school is 2 blocks east and 2 blocks north of the northeast corner of City Park. On school days she bikes on streets to the southwest corner of City Park, then takes a diagonal path through the park to the northeast corner, and then bikes on streets to school. If her route is as short as possible, how many different routes can she take?  
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 18
22. Toothpicks are used to make a grid that is 60 toothpicks long and 32 toothpicks wide. How many toothpicks are used altogether?  
 (A) 1920 (B) 1952 (C) 1980 (D) 2013 (E) 3932



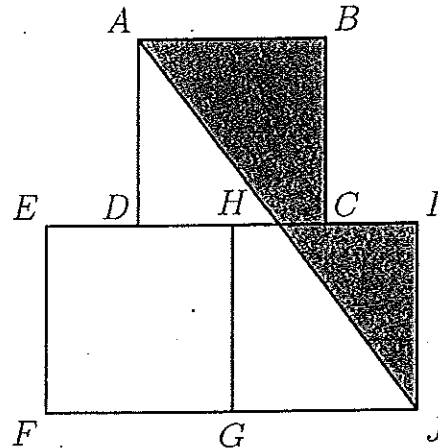
23. Angle  $ABC$  of  $\triangle ABC$  is a right angle. The sides of  $\triangle ABC$  are the diameters of semicircles as shown. The area of the semicircle on  $\overline{AB}$  equals  $8\pi$ , and the arc of the semicircle on  $\overline{AC}$  has length  $8.5\pi$ . What is the radius of the semicircle on  $\overline{BC}$ ?  
 (A) 7 (B) 7.5 (C) 8 (D) 8.5 (E) 9



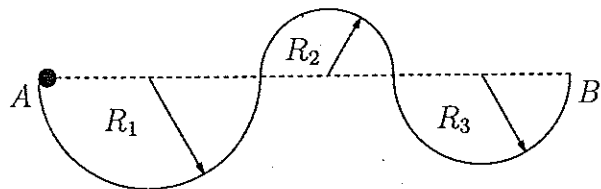


24. Squares  $ABCD$ ,  $EFGH$ , and  $GHIJ$  are equal in area. Points  $C$  and  $D$  are the midpoints of sides  $IH$  and  $HE$ , respectively. What is the ratio of the area of the shaded pentagon  $AJICB$  to the sum of the areas of the three squares?

(A)  $\frac{1}{4}$     (B)  $\frac{7}{24}$     (C)  $\frac{1}{3}$     (D)  $\frac{3}{8}$     (E)  $\frac{5}{12}$



25. A ball with diameter 4 inches starts at point A to roll along the track shown. The track is comprised of 3 semicircular arcs whose radii are  $R_1 = 100$  inches,  $R_2 = 60$  inches, and  $R_3 = 80$  inches, respectively. The ball always remains in contact with the track and does not slip. What is the distance the center of the ball travels over the course from A to B?
- (A)  $238\pi$     (B)  $240\pi$     (C)  $260\pi$     (D)  $280\pi$     (E)  $500\pi$



### ĐỀ BÀI

1. Amma muốn sắp xếp các ô tô mô hình của cô thành các hàng với đúng 6 chiếc xe trong mỗi hàng. Cô ấy có 23 chiếc xe mô hình. Hỏi Amma cần mua thêm ít nhất bao nhiêu chiếc xe mô hình để có thể sắp xếp tất cả xe của mình theo cách này?
- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5

2. Một biển hiệu ở siêu thị cá cho biết: "Giảm giá 50% chỉ duy nhất ngày hôm nay, một gói nửa pound chỉ với \$3 một gói". Giá gốc của 1 pound cá là bao nhiêu đô la?  
(A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15
3. Tính giá trị biểu thức  $4.(-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots + 1000)$ ?  
(A) -10 (B) 0 (C) 1 (D) 500 (E) 2000.
4. Tám người bạn ăn tại một nhà hàng và đồng ý chia hóa đơn bằng nhau. Bởi vì Judi quên mang tiền nên mỗi người trong số bảy người còn lại phải trả thêm \$2,50 để thanh toán phần của Judi. Hỏi tổng hóa đơn tiền ăn của 8 người là bao nhiêu?  
(A) \$120 (B) \$128 (C) \$140 (D) \$144 (E) \$160
5. Hammie 6 tuổi và nặng 106 pound. Bốn em gái sinh tư của Hammie có cân nặng là 5, 5, 6 và 8 pound. Cân nặng trung bình (TB) của 5 đứa trẻ hay số cân nặng ở chính giữa khi sắp xếp theo thứ tự tăng dần (trung vị) là lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu pound?  
(A) Trung vị, 60 (B) Trung vị, 20 (C) TB, 5 (D) TB, 15 (E) TB, 20
6. Số ở mỗi ô bên dưới là tích của hai số ở hai ô hàng trên mà tiếp xúc với nó. Ví dụ  $30 = 6 \times 5$ . Số còn thiếu trong hàng đầu tiên là bao nhiêu?  
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
7. Trey và mẹ cậu dừng lại ở một ngã tư đường sắt để chờ xe lửa đi qua. Khi xe lửa bắt đầu vượt qua, Trey đếm được 6 xe ô tô trong 10 giây đầu tiên. Xe lửa đi qua mất 2 phút và 45 giây với một tốc độ không đổi. Có khoảng bao nhiêu (lấy xấp xỉ tốt nhất) số chiếc ô tô đi qua trong lúc xe lửa qua ngã tư?  
(A) 60 (B) 80 (C) 100 (D) 120 (E) 140
8. Một đồng xu cân bằng (1 mặt hình đầu người, 1 mặt hình số) được tung 3 lần. Xác suất để xuất hiện ít nhất hai mặt hình đầu người liên tiếp là bao nhiêu?  
(A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (E)  $\frac{3}{4}$
9. Incredible Hulk có thể tăng gấp đôi khoảng cách anh nhảy với mỗi bước nhảy thành công. Nếu bước nhảy đầu tiên là 1m, thì bước nhảy thứ hai là 2m, bước nhảy thứ ba là 4m, và tiếp tục như vậy, khi đó bước nhảy thứ bao nhiêu sẽ là lần đầu tiên anh ấy nhảy xa hơn 1 km?  
(A) thứ 9 (B) thứ 10 (C) thứ 11 (D) thứ 12 (E) thứ 13

10. Tỷ số giữa BCNN(180, 594) và UCLN(180, 594) là bao nhiêu?  
(A) 110 (B) 165 (C) 330 (D) 625 (E) 660
11. Ông của Ted đã sử dụng máy chạy bộ của mình vào 3 ngày trong tuần và mỗi ngày chạy 2 dặm. Ông chạy với tốc độ 5 dặm một giờ vào thứ Hai, 3 dặm một giờ vào thứ Tư và 4 dặm một giờ vào thứ Sáu. Nếu ông đi bộ với tốc độ 4 dặm một giờ, ông sẽ phải dành ít thời gian hơn trên máy chạy bộ. Hỏi thời gian ít hơn là bao nhiêu phút?  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
12. Vào năm 2013 ở hội chợ Winnebago County Fair, một gian hàng đã đưa ra một "chương trình khuyến mãi đặc biệt" khi bán dép. Nếu bạn mua một đôi dép với mức giá thông thường là \$50, bạn sẽ được giảm giá 40% khi mua đôi thứ hai, và mua một đôi thứ ba với một nửa giá ban đầu. Javier đã lợi dụng "chương trình khuyến mãi đặc biệt" để mua ba đôi dép. Hỏi Javier đã tiết kiệm được bao nhiêu phần trăm trong số \$150 giá gốc?  
(A) 25% (B) 30% (C) 33% (D) 40% (E) 45%
13. Khi Clara tính tổng các điểm số của mình, cô vô tình đảo ngược chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng chục của một điểm số. Số nào trong các số dưới đây có thể là hiệu giữa tổng sai và tổng đúng?  
(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49
14. Abe cầm 1 hạt đậu màu xanh lá cây và 1 hạt đậu màu đỏ. Bea cầm 1 hạt đậu màu xanh lá cây, 1 hạt đậu màu vàng, và 2 hạt đậu màu đỏ. Mỗi người chọn ngẫu nhiên một hạt đậu để cho người kia xem. Xác suất để hai hạt đậu cùng màu là bao nhiêu?  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (E)  $\frac{2}{3}$
15. Nếu  $3^p + 3^4 = 90$ ,  $2^r + 44 = 76$ , và  $5^3 + 6^s = 1421$  thì tích của  $p, r$  và  $s$  là bao nhiêu?  
(A) 27 (B) 40 (C) 50 (D) 70 (E) 90
16. Một số học sinh của trường trung học Fibonacci đang tham gia vào một dự án phục vụ cộng đồng. Tỷ lệ học sinh lớp 8 so với học sinh lớp 6 là 5 : 3, và tỷ lệ học sinh lớp 8 so với học sinh lớp 7 là 8 : 5. Có ít nhất bao nhiêu học sinh có thể tham gia vào dự án?  
(A) 16 (B) 40 (C) 55 (D) 79 (E) 89

17. Tổng của sáu số nguyên dương liên tiếp là 2013. Số lớn nhất trong sáu số là bao nhiêu?  
(A) 335      (B) 338      (C) 340      (D) 345      (E) 350
18. Isabella sử dụng các khối lập phương cạnh 1 feet để xây dựng một pháo đài hình chữ nhật có chiều dài 12 feet, rộng 10 feet và cao 5 feet. Sàn và bốn bức tường đều dày 1 feet. Cần bao nhiêu khối lập phương để xây dựng pháo đài?  
(A) 204      (B) 280      (C) 320      (D) 340      (E) 600
19. Bridget, Cassie, và Hannah đang thảo luận về kết quả của bài kiểm tra toán cuối cùng của họ. Hannah cho Bridget và Cassie thấy bài kiểm tra của mình, nhưng Bridget và Cassie không cho ai xem bài kiểm tra của họ. Cassie cho biết: "Tôi không bị điểm thấp nhất trong lớp", và Bridget nói thêm: "Tôi không được điểm cao nhất lớp". Bảng xếp hạng số điểm của ba cô gái từ cao xuống thấp là như thế nào?  
(A) Hannah, Cassie, Bridget      (B) Hannah, Bridget, Cassie  
(C) Cassie, Bridget, Hannah      (D) Cassie, Hannah, Bridget  
(E) Bridget, Cassie, Hannah
20. Một hình chữ nhật  $1 \times 2$  được vẽ trong một hình bán nguyệt với một cạnh nằm trên đường kính. Diện tích của hình bán nguyệt là bao nhiêu?  
(A)  $\frac{\pi}{2}$       (B)  $\frac{2\pi}{3}$       (C)  $\pi$       (D)  $\frac{4\pi}{3}$       (E)  $\frac{5\pi}{3}$
21. Samantha sống ở 2 tòa nhà phía tây và 1 tòa nhà phía nam ở góc tây nam của công viên thành phố. Trường học của cô là 2 tòa nhà phía đông và 2 tòa nhà phía bắc góc phía đông bắc của công viên thành phố. Vào những ngày đi học, cô đạp xe trên đường phố tới góc tây nam của công viên thành phố, sau đó đi theo đường chéo qua công viên đến góc phía đông bắc, và sau đó đạp xe trên đường phố để đến trường. Nếu tuyến đường của cô là càng ngắn càng tốt, cô ấy có thể đi bao nhiêu tuyến đường khác nhau?  
(A) 3      (B) 6      (C) 9      (D) 12      (E) 18
22. Cần tất cả bao nhiêu chiếc tấm để tạo ra một mạng lưới dài 60 chiếc tấm và rộng 32 chiếc tấm?  
(A) 1920      (B) 1952      (C) 1980      (D) 2013      (E) 3932
23.  $\triangle ABC$  vuông tại A. Các cạnh của  $\triangle ABC$  là các đường kính của các hình bán nguyệt như hình vẽ. Diện tích của hình bán nguyệt dây AB là  $8\pi$ , cung của hình bán nguyệt dây AC có độ dài là  $8,5\pi$ . Tính bán kính

của hình bán nguyệt dây  $BC$ ?

- (A) 7      (B) 7,5      (C) 8      (D) 8,5      (E) 9

24. Các hình vuông  $ABCD$ ,  $EFGH$ , và  $GHIJ$  có diện tích bằng nhau. Điểm  $C$  và  $D$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $IH$  và  $HE$ . Tính tỷ số giữa diện tích của hình ngũ giác  $AJICB$  so với tổng diện tích của ba hình vuông?
- (A)  $\frac{1}{4}$       (B)  $\frac{7}{24}$       (C)  $\frac{1}{3}$       (D)  $\frac{3}{8}$       (E)  $\frac{5}{12}$

25. Một quả bóng  $A$  có đường kính 4 inch bắt đầu từ điểm  $A$  chạy dọc theo đường đi như hình vẽ. Đoạn đường gồm ba hình bán nguyệt có đường kính lần lượt là  $R_1 = 100$  inch,  $R_2 = 60$  inch và  $R_3 = 80$  inch. Quả bóng luôn luôn tiếp xúc với đường đi và không trượt. Tính quãng đường tâm quả bóng di chuyển theo đường từ  $A$  đến  $B$ ?

### SOLUTIONS - LỜI GIẢI

1. In order to have her model cars in perfect, complete rows of 6, Danica must have a number of cars that is a multiple of 6. The smallest multiple of 6 which is larger than 23 is 24, so she'll need to buy (A) 1 more model car.

• Để các xe ô tô mô hình của Amma được sắp xếp thành các hàng với đúng 6 chiếc một hàng thì số xe của cô ấy phải là một bội của 6. Bội nhỏ nhất của 6 mà lớn hơn 23 là 24, vì vậy cô ấy sẽ cần phải mua ít nhất (A) 1 chiếc xe.

2. The 50% off price of half a pound of fish is 3, so the 100%, or the regular price, of a half pound of fish is 6. Consequently, if half a pound of fish costs 6, then a whole pound of fish is (D) 12 dollars.

• Sau khi giảm giá 50% thì giá một nửa pound cá là 3, vì vậy 100% giá hay giá ban đầu của một nửa pound cá là 6. Do đó, nếu một nửa pound cá có giá 6, thì một pound cá có giá ban đầu là (D) 12 đô la.

3. Notice that we can pair up every two numbers to make a sum of 1:

$$\begin{aligned} & -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots + 1000 \\ &= ((-1 + 2) + (-3 + 4) + \cdots + (-999 + 1000)) \\ &= (1 + 1 + \cdots + 1) = 500 \end{aligned}$$

Therefore, the answer is  $4 \cdot 500 = \text{(E) 2000}$ .

• Chúng ta có thể chia các số thành từng cặp có tổng là 1.  
 $-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + 1000$   
 $= ((-1 + 2) + (-3 + 4) + \dots + (-999 + 1000))$   
 $= (1 + 1 + \dots + 1) = 500$

Do đó câu trả lời là:  $4 \cdot 500 = \boxed{(E) 2000}$ .

4. Each of her seven friends paid \$2.50 to cover Judi's portion. Therefore, Judi's portion must be  $\$2.50 \cdot 7$ . Since Judi was supposed to pay  $\frac{1}{8}$  of the total bill, the total bill must be  $8 \cdot 7 \cdot \$2.50 = \boxed{(C) \$140}$ .

• Mỗi người trong số bảy người bạn của Judi đã trả \$2,50 để trang trải phần của Judi. Do đó, phần Judi của phải là  $\$2,50 \cdot 7$ . Do Judi phải trả  $\frac{1}{8}$  trong tổng số hóa đơn, tổng hóa đơn phải là  $8 \cdot 7 \cdot \$2,50 = \boxed{(C) \$140}$ .

5. The median here is obviously less than the mean, so options (A) and (B) are out.

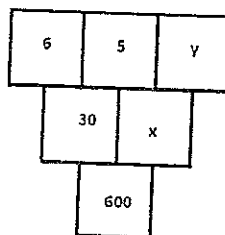
Lining up the numbers (5, 5, 6, 8, 106), we see that the median weight is 6 pounds.

The average weight of the five kids is  $\frac{5 + 5 + 6 + 8 + 106}{5} = \frac{130}{5} = 26$ .

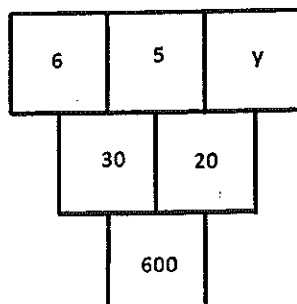
Therefore, the average weight is bigger, by  $26 - 6 = 20$  pounds, making the answer  $\boxed{(E) \text{ average, by } 20}$ .

• Sắp xếp các số cân nặng (5, 5, 6, 8, 106), chúng ta thấy rằng số chính giữa (trung vị) là 6 pound. Trong khi khối lượng trung bình của 5 đứa trẻ là  $\frac{5 + 5 + 6 + 8 + 106}{5} = \frac{130}{5} = 26$ . Do đó khối lượng trung bình lớn hơn trung vị và lớn hơn  $26 - 6 = 20$  pound nên câu trả lời là  $\boxed{(E) \text{ TB, } 20}$ .

6. Let the value in the empty box in the middle row be  $x$ , and the value in the empty box in the top row be  $y$ .  $y$  is the answer we're looking for.



We see that  $600 = 30x$ , making  $x = 20$ .



It follows that  $20 = 5y$ , so  $y = \boxed{(C) 4}$ .

• Gọi số bị thiếu trong ô trống hàng ở giữa là  $x$  và số bị thiếu trong ô trống ở hàng trên cùng là  $y$ .

Do  $600 = 30x$  nên  $x = 20$ .

Do  $20 = 5y$  nên  $y = \boxed{(C) 4}$ .

7. If Trey saw  $\frac{6 \text{ cars}}{10 \text{ seconds}}$ , then he saw  $\frac{3 \text{ cars}}{5 \text{ seconds}}$ .  
2 minutes and 45 seconds can also be expressed as  $2 \cdot 60 + 45 = 165$  seconds.

Trey's rate of seeing cars,  $\frac{3 \text{ cars}}{5 \text{ seconds}}$ , can be multiplied by  $165 \div 5 = 33$  on the top and bottom (and preserve the same rate):

$\frac{3 \cdot 33 \text{ cars}}{5 \cdot 33 \text{ seconds}} = \frac{99 \text{ cars}}{165 \text{ seconds}}$ . It follows that the most likely number of cars is  $\boxed{(C) 100}$ .

• Nếu Trey nhìn thấy  $\frac{6 \text{ ô tô}}{10 \text{ giây}}$ , thì cậu ấy đã nhìn  $\frac{3 \text{ ô tô}}{5 \text{ giây}}$ . Đổi 2 phút

45 giây  $= 2 \cdot 60 + 45 = 165$  giây. Tốc độ nhìn các ô tô của Trey là

$\frac{3 \text{ ô tô}}{5 \text{ giây}} = \frac{3 \cdot 33 \text{ ô tô}}{5 \cdot 33 \text{ giây}} = \frac{99 \text{ ô tô}}{165 \text{ giây}}$ . Điều đó cho thấy số ô tô đi qua là khoảng  $\boxed{(C) 100}$  chiếc.

8. First, there are  $2^3 = 8$  ways to flip the coins, in order.

The ways to get two consecutive heads are HHT and THH.

The way to get three consecutive heads is HHH.

Therefore, the probability of flipping at least two consecutive heads is

$\boxed{(C) \frac{3}{8}}$ .

• Đầu tiên, có  $2^3 = 8$  cách để lật đồng xu theo thứ tự. Có 2 cách để có

được 2 mặt đầu người liên tiếp và 1 cách để có được ba mặt đầu người liên tiếp. Do đó, khả năng lật ít nhất hai đầu người liên tiếp là  $\boxed{(C) \frac{3}{8}}$ .

9. This is a geometric sequence in which the common ratio is 2. To find the jump that would be over a 1000 meters, we note that  $2^{10} = 1024$ . However, because the first term is  $2^0 = 1$  and not  $2^1 = 2$ , the solution to the problem is  $10 - 0 + 1 = \boxed{(C) 11^{th}}$

• Để tìm bước nhảy vượt qua  $1km = 1000m$  ta chú ý  $2^{10} = 1024$ . Tuy nhiên  $2^0 = 1$  chứ không phải  $2^1 = 2$  nên kết quả của bài toán là  $10 - 0 + 1 = \boxed{(C) \text{ thứ } 11}$

10. To find either the LCM or the GCF of two numbers, always prime factorize first.

The prime factorization of  $180 = 3^2 \times 5 \times 2^2$ .

The prime factorization of  $594 = 3^3 \times 11 \times 2$ .

Then, find the greatest power of all the numbers there are; if one number is one but not the other, use it (this is  $3^3, 5, 11, 2^2$ ). Multiply all of these to get 5940.

For the GCF of 180 and 594, use the least power of all of the numbers that are in both factorizations and multiply.  $3^2 \times 2 = 18$ .

Thus the answer  $= \frac{5940}{18} = \boxed{(C) 330}$ .

• Phân tích 180 và 594 ra thừa số nguyên tố.

$$180 = 3^2 \times 5 \times 2^2.$$

$$594 = 3^3 \times 11 \times 2.$$

$$BCNN(180, 594) = 3^3 \times 5 \times 11 \times 2^2 = 5940.$$

$$UCLN(180, 594) = 3^2 \times 2 = 18.$$

$$\text{Do đó câu trả lời là } \frac{5940}{18} = \boxed{(C) 330}.$$

11. We use that fact that  $d = rt$ . Let  $d$  = distance,  $r$  = rate or speed, and  $t$  = time. In this case, let  $x$  represent the time.

On Monday, he was at a rate of 5 m.p.h. So,  $5x = 2 \text{ miles} \Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ hours}$ .

For Wednesday, he walked at a rate of 3 m.p.h. Therefore,  $3x = 2 \text{ miles} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ hours}$ .

On Friday, he walked at a rate of 4 m.p.h. So,  $4x = 2 \text{ miles} \Rightarrow x =$



$\frac{2}{4}$  hours.

Adding up the hours yields  $\frac{2}{5}$  hours +  $\frac{2}{3}$  hours +  $\frac{2}{4}$  hours =  $\frac{94}{60}$  hours.

We now find the amount of time Grandfather would have taken if he walked at 4 m.p.h per day. Set up the equation,  $4x = 2 \text{ miles} \times 3 \text{ days} \Rightarrow$

$$x = \frac{3}{2} \text{ hours.}$$

To find the amount of time saved, subtract the two amounts:  $\frac{94}{60}$  hours -

$$\frac{3}{2} \text{ hours} = \frac{4}{60} \text{ hours. To convert this to minutes, we multiply by 60.}$$

Thus, the solution to this problem is  $\frac{4}{60} \times 60 = \boxed{(D) 4}$

• Trong thực tế chúng ta sử dụng  $d = r.t$ , trong đó  $d$  là khoảng cách,  $r$  là vận tốc và  $t$  là thời gian. Trong bài toán này ta gọi  $x$  là thời gian. Thứ Hai, ông chạy trên máy với vận tốc 5 dặm một giờ, nên

$$5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ (giờ).}$$

Thứ Tư, ông chạy trên máy với vận tốc 3 dặm mỗi giờ, nên

$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (giờ).}$$

Thứ Sáu, ông chạy trên máy với vận tốc 4 dặm mỗi giờ, nên

$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} \text{ (giờ).}$$

Tổng thời gian chạy bộ trên máy trong cả tuần là

$$\frac{2}{5} \text{ giờ} + \frac{2}{3} \text{ giờ} + \frac{2}{4} \text{ giờ} = \frac{94}{60} \text{ giờ.}$$

Bây giờ, chúng ta tìm thời gian mà ông của Ted đi bộ với vận tốc 4 dặm mỗi ngày. Ta có  $4x = 2 \text{ dặm} \times 3 \text{ ngày} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$  giờ.

Do  $\frac{94}{60}$  giờ -  $\frac{3}{2}$  giờ =  $\frac{4}{60}$  giờ nên thời gian đi bộ ít hơn thời gian chạy bộ trên máy là:  $\frac{4}{60} \times 60 = \boxed{(D) 4}$  phút.

12. First, find the amount of money one will pay for three sandals without the discount. We have  $\$50 \times 3 \text{ sandals} = \$150$ .

Then, find the amount of money using the discount:  $50 + 0.6 \times 50 + \frac{1}{2} \times 50 = \$105$ .

Finding the percentage yields  $\frac{105}{150} = 70\%$ .

To find the percent saved, we have  $100\% - 70\% = \boxed{(B) 30\%}$

• Trước tiên, ta tìm số tiền phải trả cho ba đôi dép khi không được giảm giá là  $\$50 \times 3 \text{ đôi dép} = \$150$ .

Số tiền phải trả khi được giảm giá là:  $50 + 0.6 \times 50 + \frac{1}{2} \times 50 = \$105$ .

Phần trăm số tiền phải trả là:  $\frac{105}{150} = 70\%$ .

Phần trăm số tiền tiết kiệm được là:  $100\% - 70\% = \boxed{(B) 30\%}$ .

13. Let the two digits be  $a$  and  $b$ .

The correct score was  $10a + b$ . Clara misinterpreted it as  $10b + a$ . The difference between the two is  $|9a - 9b|$  which factors into  $|9(a - b)|$ . Therefore, since the difference is a multiple of 9, the only answer choice that is a multiple of 9 is  $\boxed{(A) 45}$ .

• Giả sử hai chữ số là  $a$  và  $b$ . Điểm số chính xác là  $10a + b$ . Clara nhầm là  $10b + a$ . Hiệu giữa hai số là  $|9a - 9b|$  phân tích thành  $|9(a - b)|$ . Do đó, hiệu của hai số là bội của 9, đáp án duy nhất là một bội của 9 là  $\boxed{(A) 45}$ .

14. The probability that both show a green bean is  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ . The probability that both show a red bean is  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ . Therefore the probability is

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{(C) \frac{3}{8}}$$

• Xác suất để cả hai hạt đậu màu xanh là  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ . Xác suất để cả hai hạt đậu màu đỏ là  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ . Do đó tổng xác suất là:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{(C) \frac{3}{8}}$ .

$$15. 3^p + 3^4 = 90$$

$$3^p + 81 = 90$$

$$3^p = 9$$

$$\text{Therefore, } p = 2.$$

$$2^r + 44 = 76$$

$$2^r = 32$$

Therefore,  $r = 5$ .

$$5^3 + 6^s = 1421$$

$$125 + 6^s = 1421$$

$$6^s = 1296$$

To most people, it would not be immediately evident that  $6^4 = 1296$ , so we can multiply 6's until we get the desired number:  $6 \cdot 6 = 36$

$$6 \cdot 36 = 216$$

$$6 \cdot 216 = 1296 = 6^4, \text{ so } s = 4.$$

Therefore the answer is  $2 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{\text{(B) } 40}$

$$\bullet \text{ Do } 3^p + 3^4 = 90 \Rightarrow 3^p + 81 = 90 \Rightarrow 3^p = 9 \text{ nên } p = 2.$$

$$\text{Do } 2^r + 44 = 76 \Rightarrow 2^r = 32 \text{ nên } r = 5.$$

$$\text{Do } 5^3 + 6^s = 1421 \Rightarrow 125 + 6^s = 1421 \Rightarrow 6^s = 1296 \text{ nên } s = 4.$$

$$\text{Vậy đáp số là: } 2 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{\text{(B) } 40}.$$

16. We multiply the first ratio by 8 on both sides, and the second ratio by 5 to get the same number for 8th graders, in order that we can put the two ratios together:

$$5 : 3 = 5(8) : 3(8) = 40 : 24$$

$$8 : 5 = 8(5) : 5(5) = 40 : 25$$

Therefore, the ratio of 8th graders to 7th graders to 6th graders is  $40 : 25 : 24$ . Since the ratio is in lowest terms, the smallest number of students participating in the project is  $40 + 25 + 24 = \boxed{\text{(E) } 89}$ .

• Ta có:

$$5 : 3 = 40 : 24$$

$$8 : 5 = 40 : 25$$

Do đó, tỉ số giữa học sinh lớp 8 với lớp 7 và với lớp 6 là  $40 : 25 : 24$ .

Do tỉ lệ này là tối giản, nên số nhỏ nhất các học sinh tham gia dự án là  $40 + 25 + 24 = \boxed{\text{(E) } 89}$ .

17. Let the first term be  $x$ . Our integers are  $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5$ . We have,  $6x + 15 = 2013 \Rightarrow x = 333 \Rightarrow x + 5 = \boxed{\text{(B) } 338}$

$$\bullet \text{ Gọi số đầu tiên là } x. \text{ Sáu số nguyên liên tiếp bắt đầu từ } x \text{ là } x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5. \text{ Ta có } 6x + 15 = 2013 \Rightarrow x = 333 \Rightarrow x + 5 = \boxed{\text{(B) } 338}$$

18. We can just calculate the volume of the prism that was cut out of the original  $12 \times 10 \times 5$  box. Each interior side of the fort will be 2 feet shorter than each side of the outside. Since the floor is 1 foot, the height will be 4 feet. So the volume of the interior box is  $10 \times 8 \times 4 = 320 \text{ ft}^3$ .

The volume of the original box is  $12 \times 10 \times 5 = 600 \text{ ft}^3$ . Therefore, the number of blocks contained in the fort is  $600 - 320 = \boxed{\text{(B) } 280}$ .

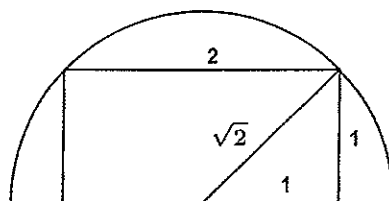
• Thể tích của hình hộp chữ nhật chứa pháo đài là  $12 \times 10 \times 5 = 600 \text{ ft}^3$ .  
Thể tích của hình hộp chữ nhật bị khoét đi là:  $10 \times 8 \times 4 = 320 \text{ ft}^3$ .

Do đó, thể tích của pháo đài (hay số khối lập phương chứa trong pháo đài) là:  $600 - 320 = \boxed{\text{(B) } 280}$ .

19. If Hannah did better than Cassie, there would be no way she could know for sure that she didn't get the lowest score in the class. Therefore, Hannah did worse than Cassie. Similarly, if Hannah did worse than Bridget, there is no way Bridget could have known that she didn't get the highest in the class. Therefore, Hannah did better than Bridget, so our order is  $\boxed{\text{(D) Cassie, Hannah, Bridget}}$ .

• Nếu Cassie làm tệ hơn so với Hannah, cô ấy không thể biết chắc chắn rằng cô ấy không bị điểm thấp nhất trong lớp. Do đó, Hannah đã làm bài tệ hơn Cassie. Tương tự như vậy, nếu Hannah đã làm bài tệ hơn Bridget, không có cách nào Bridget có thể biết rằng cô đã không được điểm cao nhất trong lớp. Do đó, Hannah đã làm tốt hơn so với Bridget, vì vậy thứ tự của chúng ta là  $\boxed{\text{(D) Cassie, Hannah, Bridget}}$ .

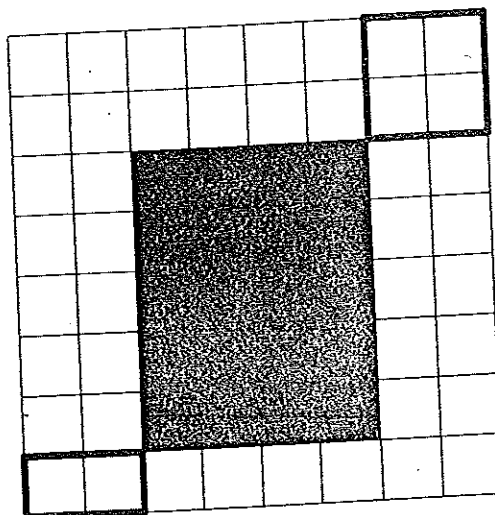
20. A semicircle has symmetry, so the center is exactly at the midpoint of the 2 side on the rectangle, making the radius, by the Pythagorean Theorem,  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . The area is  $\frac{2\pi}{2} = \boxed{\text{(C) } \pi}$ .



• Nửa hình tròn có tính chất đối xứng nên tâm của nó chính là trung điểm của 1 cạnh hình chữ nhật. Từ Định lí Pitago ta có bán kính của hình tròn là:  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Do đó diện tích của nửa hình tròn là  $\frac{2\pi}{2} = \boxed{\text{(C) } \pi}$ .

21. Using combinations, we get that the number of ways to get from Samantha's house to City Park is  $\binom{3}{1} = 3$ , and the number of ways to get from

City Park to school is  $\binom{4}{2} = 6$ . Since there's one way to go through City Park (just walking straight through), the number of different ways to go from Samantha's house to City Park to school  $3 \cdot 6 = \boxed{(E) 18}$ .



• Số cách để đi từ nhà của Samantha đến công viên thành phố là:  $\binom{3}{1} =$

3 và số cách để đi từ công viên thành phố đến trường học là  $\binom{4}{2} = 6$ .

Do có đúng một con đường để đi qua công viên thành phố (chỉ đi thẳng qua), nên số cách khác nhau để đi từ nhà của Samantha qua công viên thành phố để đến trường là  $3 \cdot 6 = \boxed{(E) 18}$ .

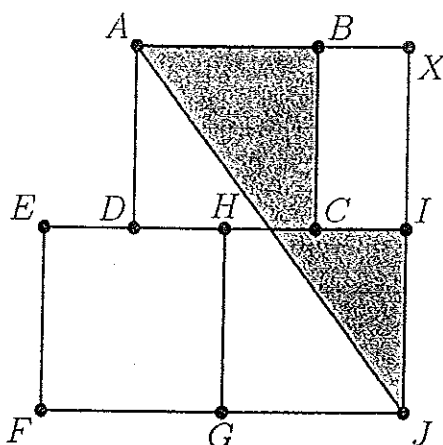
22. There are 61 vertical columns with a length of 32 toothpicks, and there are 33 horizontal rows with a length of 60 toothpicks. An effective way to verify this is to try a small case, i.e. a  $2 \times 3$  grid of toothpicks. Thus, our answer is  $61 \cdot 32 + 33 \cdot 60 = \boxed{(E) 3932}$ .

• Có 61 cột dọc với chiều dài 32 chiếc tăm xỉa răng, và có 33 hàng ngang với chiều dài 60 chiếc tăm. Một cách hiệu quả để xác minh điều này là để thử một trường hợp nhỏ, chẳng hạn với một lưới tăm  $2 \times 3$ . Vì vậy, câu trả lời của chúng ta là  $61 \cdot 32 + 33 \cdot 60 = \boxed{(E) 3932}$ .

23. If the semicircle on AB were a full circle, the area would be  $16\pi$ . Therefore the diameter of the first circle is 8. The arc of the largest semicircle would normally have a complete diameter of 17. The Pythagorean theorem says that the other side has length 15, so the radius is  $\boxed{(B) 7.5}$ .

- Nếu hình bán nguyệt dây  $AB$  là một hình tròn đầy đủ, diện tích sẽ là  $16\pi$  nên  $AB = 8$ . Hình bán nguyệt lớn nhất có đường kính là  $AC = 17$ . Từ Định lý Pytago ta tính được cạnh bên còn lại là  $BC = 15$ , do đó bán kính là  $\boxed{(B) 7,5}$ .

24. First let  $s = 2$  (where  $s$  is the side length of the squares) for simplicity. We can extend  $IJ$  until it hits the extension of  $AB$ . Call this point  $X$ . The area of triangle  $AXJ$  then is  $\frac{3 \cdot 4}{2}$ . The area of rectangle  $BXIC$  is  $2 \cdot 1 = 2$ . Thus, our desired area is  $6 - 2 = 4$ . Now, the ratio of the shaded area to the combined area of the three squares is  $\frac{4}{3 \cdot 2^2} = \boxed{(C) \frac{1}{3}}$ .



- Để đơn giản ta gọi độ dài cạnh hình vuông là 2. Kéo dài  $IJ$  và  $AB$  cắt nhau tại  $X$ . Diện tích tam giác  $AXJ$  là  $\frac{3 \cdot 4}{2}$ , diện tích của hình chữ nhật  $BXIC$  là  $2 \cdot 1 = 2$ . Do đó diện tích của hình tô màu là  $6 - 2 = 4$ . Vậy tỷ số giữa diện tích của hình được tô màu so với diện tích của ba hình chữ nhật là:  $\frac{4}{3 \cdot 2^2} = \boxed{(C) \frac{1}{3}}$ .
25. The total length of all of the arcs is  $100\pi + 80\pi + 60\pi = 240\pi$ . Since we want the path from the center, the actual distance will be shorter. Therefore, the only answer choice less than  $240\pi$  is  $\boxed{(A) 238\pi}$ .
- Tổng chiều dài của tất cả các cung tròn là  $100\pi + 80\pi + 60\pi = 240\pi$ . Do quãng đường cần tính là quãng đường tâm quả bóng di chuyển nên sẽ phải ngắn hơn tổng độ dài các cung. Vì vậy, đáp án duy nhất nhỏ hơn  $240\pi$  là  $\boxed{(A) 238\pi}$ .

# ANSWER KEY - ĐÁP SỐ

Kì thi AMC

Năm học 2014 - 2015

## AMC 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	E	B	E	C	D	B	D	D	A	A	B	D
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
B	C	B	B	D	A	B	A	E	A	C	B	

## AMC 10 - Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	D	D	B	E	B	B	B	D	C	C	C	C
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
C	B	B	D	E	D	B	C	A	C	B	A	

## AMC 10 - Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	B	A	C	B	E	A	E	B	C	B	A	E
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	B	C	B	D	C	A	D	D	B	D	B	

## AMC 12- Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	E	E	B	D	B	D	C	C	E	D	B	E
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	C	C	A	C	B	A	D	D	A	D	D	

## AMC 12- Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	B	A	B	B	A	D	D	C	C	E	D	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	D	C	D	D	C	B	D	D	B	D	B	

Năm học 2013 - 2014

## AMC 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	D	E	C	E	C	C	C	C	C	D	B	A
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
C	B	E	B	B	D	C	E	E	B	C	A	

## AMC 10 - Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	C	E	B	C	A	B	D	C	B	C	C	C
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	C	E	D	B	A	D	E	E	C	A	B	

## AMC 10 - Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	E	E	B	A	C	A	E	A	C	C	C	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	A	B	D	E	D	C	B	B	E	B	C	

## AMC 12 - Test A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	B	B	A	C	D	A	C	B	B	C	D	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
C	B	D	A	C	E	D	A	B	B	C	B	

## AMC 12 - Test B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	C	E	B	A	D	D	C	B	D	E	B	C
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	C	E	E	B	E	B	C	C	C	D	D	